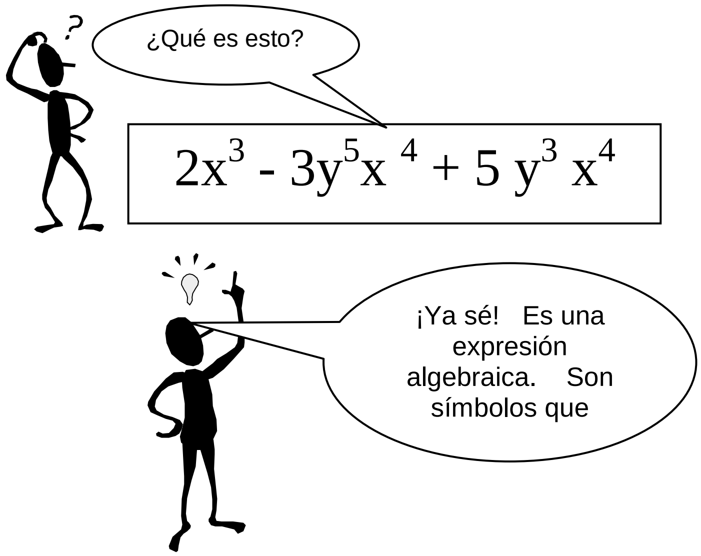
ÁLGEBRA



$$2x^3 - 3y^5x^4 + 5y^3x^4$$

El hombre siempre ha buscado la forma de expresar sus ideas utilizando diversos materiales. El lenguaje gráfico significó un elemento fundamental para la comunicación de las distintas culturas, además de que contribuyó a organizar el pensamiento del hombre. En este sentido, el uso de la representación es esencial en las matemáticas.

Un primer acercamiento a ese proceso de generalización lo constituye el desarrollo de la noción de los conjuntos de números, descritos en el tema anterior y las operaciones fundamentales que se hacen con dichos números. Otro tipo de generalización se tiene con el álgebra, ya que se usan letras del alfabeto para representar números y cuando se usan de esta manera se les llama símbolos literales. El álgebra elemental o clásica es aquella rama de la matemática que se ocupa de las propiedades de los números utilizando símbolos literales, signos de operación y otros símbolos especiales.

La sustitución de palabras por símbolos es uno de los procedimientos que ha permitido el progreso de la ciencia y la técnica. El lenguaje algebraico es un medio para anotar, de manera abreviada, las operaciones que deben efectuarse y sus resultados.

El álgebra es un lenguaje de símbolos que representan los números reales, permiten describir, analizar y proponer soluciones a modelos de problemas y por medio de la generalización de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y sus propiedades, dan origen a las llamadas expresiones algebraicas.

Este tema principia con potenciación y radicación, como base para operar polinomios para luego estudiar las operaciones básicas entre polinomios, productos notables y factorización.

CONTENIDO

ÁLGEBRA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE ODONTOLOGÍA
CURSO: FÍSICA MATEMATICA
DOCUMENTO DE APOYO A LA DOCENCIA.
MODIFICADO CON FINES ACADÉMICOS.
AUTORIZADO POR EL AUTOR DEL LIBRO FÍSICA MATEMATICA PARA EL ESTOMATÓLOGO. 2005
AÑO 2019

1. POLINOMIOS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

El manejo de expresiones simbólicas representativas de números reales, las cuales combinadas mediante operaciones de suma, diferencia, producto y cociente dan lugar a las expresiones algebraicas y cuyo estudio se conoce con el nombre de Álgebra. En este apartado se estudiarán las operaciones entre polinomios como casos especiales de expresiones algebraicas y la descomposición en factores que se conoce como factorización.

Una expresión algebraica es una combinación de símbolos representativos de números reales, mediante las operaciones suma, diferencia, producto, cociente y extracción de raíces.

Ejemplos:

$$\frac{X^3 - 2x + 3^{1/9}}{22x} \quad ; \quad \frac{2xy + 3x}{y - 1}$$

Cuando se sustituyen las variables (letras) por números específicos en una expresión algebraica, al número real que resulte se le llama valor numérico de la expresión. Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, los dominios están elegidos para que la expresión tenga sentido, los denominadores no deben ser cero y las raíces deben existir siempre. Las partes de un término algebraico son: signo, coeficiente y parte literal: - 5 x .

1.1. TÉRMINOS SEMEJANTES

El concepto matemático de termino, puede definirse como una expresión algebraica que consta de uno o varios símbolos (letras) que **no** se encuentran entre sí por signos como e mas (+) o el menos (-) . Ejemplo $3\,m^2\,n$ es un término, por no estar separado por signos

Términos semejantes, son aquellos términos que tienen la misma parte literal con los mismos exponentes. Ejemplo:

$3\,x^3\,y$, $-\frac{2}{5}\,x^3\,y$, $x^3\,y$ (Son términos semejantes)

$3\,m^2\,n$, $3\,mn^2$, $3mn$ (No son términos semejantes)

Los términos semejantes se pueden sumar y restar algebraicamente, únicamente sumando o restando los coeficientes (números) , y el resultado se antepone a la parte literal. Ejemplo:

$$-5ab^2 + 7ab^2 + 8ab^2 - 9ab^2 = ab^2$$

1.2. MONOMIOS:

Es una expresión algebraica entera que consta de un solo término. Ejemplo: $3\,x^4$; $6mn^3$. Con los monomios pueden trabajarse las cuatro operaciones básicas, como lo son suma, resta, multiplicación y división. Ejemplo:

- **Suma**

  $3x^2y + 6x^2y = 9x^2y$

  (Se puede realizar cuando hay términos semejantes)

- **Resta**

  $3x^2y - 6x^2y = -3x^2y$

  (Se puede realizar cuando hay términos semejantes)

- **Multiplicación**

  $(8\,a^4b^2c)\,(-2abc^3) = -16\,a^5b^3c^4$

  Procedimiento:

  (Multiplicar los coeficientes y aplicar las leyes de los exponentes a las literales)

- **División**

  $\frac{25\,x^2\,yz^3}{5xyz} = 5\,x\,z^2$

  Procedimiento:

  (Dividir los coeficientes y aplicar las leyes de los exponentes a las literales)

1.3. POLINOMIOS:

Un polinomio es cualquier suma finita de monomios. Un polinomio en ***x*** es una expresión de la forma: $\mathbf{a_0 + a_1x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}$, donde ***n*** es un entero no negativo y $\mathbf{a_n \neq 0}$.

Los símbolos $\mathbf{a_0}$ **,** $\mathbf{a_1}$ **,** $\mathbf{a_2}$ **, ...** $\mathbf{a_n}$, representan números reales fijos, mientras que ***x*** es un símbolo representativo de cualquier número real. $\mathbf{a_0}$ **,** $\mathbf{a_1}$ **,** $\mathbf{a_2}$ **, ...** $\mathbf{a_n}$ reciben el nombre de coeficientes y al número ***n*** se le llama el grado del polinomio. El número real $\mathbf{a_0}$ recibe el nombre de término independiente en el polinomio. Ejemplo: $5 + 3x + 7x^2$, los coeficientes son 3 y 7. El término independiente es 5.

Con los polinomios se pueden efectuar las cuatro operaciones básicas, fundamentales para trabajar factorización.

1. 3.1. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

La suma y/o resta de polinomios se opera como la suma y resta de expresiones algebraicas, es decir, se ordenan los términos y luego se reducen los términos que son semejantes. Ejemplo:

- **Suma**

$(-5x^3 + 4x^2 + 6x - 3) + (9x^3 + 4x^2 + x - 3) =$

Procedimiento:

1. Colocar los polinomios uno debajo del otro, ordenados y de acuerdo al mismo grado polinómico,
2. Sumar los coeficientes, de acuerdo a sus signos y aplicar leyes de los exponentes a la parte literal.

$$\begin{array}{rrrr} -5x^3 & +\ 4x^2 & +\ 6x & -\ 3 \\ \underline{+\ 9x^3} & \underline{+\ 4x^2} & \underline{+\ \ x} & \underline{-\ 3} \\ 4x^3 & +\ 8x^2 & +\ 7x & -\ 6 \end{array}$$ (Respuesta)

Nota: Cuando no se tenga el mismo grado de polinomio, dejar el espacio para el grado que falta.

- **Resta**

$(x + 2x^2 - 3x^3 + 6) - (3x - 2x^2 - 3x^3 + 2x^4 - 2) =$

Procedimiento:

1. Colocar los polinomios uno debajo del otro, ordenados y de acuerdo al mismo grado polinómico, Tomar en cuenta que un signo negativo antepuesto a un signo de agrupación, cambia el signo de los factores dentro del mismo.
2. Sumar los coeficientes, de acuerdo a sus signos y aplicar leyes de los exponentes.

$$\begin{array}{rrrrr} & -3x^3 & +\ 2x^2 & +\ x & +\ 6 \\ \underline{-\ 2x^4} & \underline{+3x^3} & \underline{+2x^2} & \underline{-3x} & \underline{+\ 2} \\ -\ 2x^4 & 0 & +\ 4x^2 & -2x & +\ 8 \end{array}$$ (Respuesta)

Nota: Cuando no se tenga el mismo grado de polinomio, dejar el espacio para el grado que falta.

1.3.2. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación y división de polinomios tiene sus diferentes variantes, las cuales se operan de la siguiente manera:

- **MULTIPLICACIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO**

El producto se obtiene cuando se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Ejemplos:

a. $(m + 2n)(-mn) = m(-mn) + 2n(-mn) = -m^2n + 2mn^2$

b. $(10x^3 - 5xy + 1)\left(\frac{2xy}{5}\right) = 10x^3\left(\frac{2xy}{5}\right) - 5xy\left(\frac{2xy}{5}\right) + 1\left(\frac{2xy}{5}\right) = 4x^4y - 2x^2y^2 + \frac{2}{5}xy$

- **DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO:** Dividir: $\frac{4x^2 - 6x - 10}{2x}$

Procedimiento:

1. Dividir cada uno de los factores del polinomio entre el monomio. $\longrightarrow$ $\frac{4x^2}{2x} + \left(\frac{-6x}{2x}\right) + \left(\frac{-10}{2x}\right) =$
2. Dividir los coeficientes y aplicar ley de exponentes a las literales. $\longrightarrow$ $2x + (-3) + \left(\frac{-5}{x}\right) =$
3. Reducir términos semejantes. $\longrightarrow$ $2x - 3 - 5x^{-1}$ (Respuesta)

- **MULTIPLICACIÓN DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO:** Multiplicar: $(x + 4)(x - 2)$

Procedimiento:

1. Colocar los polinomios uno bajo el otro. $\longrightarrow$
2. Multiplicar el 1º. término del 2º. polinomio por todos los términos del 1º. polinomio. $\longrightarrow$
3. Multiplica el 2º. término del 2º. polinomio por todos los términos del 1º. polinomio, colocando los factores de acuerdo al grado polinómico. $\longrightarrow$
4. Sumar los resultados de la multiplicación, tomando en cuenta los signos de los factores. $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ \underline{x - 2} \\ x^2 + 4x \\ \underline{- 2x - 8} \\ x^2 - 2x - 8 \end{array}$$

(Respuesta)

- **DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO:** Dividir : $(35 + 6m^2 - 31m) \div (2m - 7)$

Procedimiento

1. Ordenar los dos polinomios de forma ascendente. $(6m^2 - 31m + 35)$ y $(2m - 7)$
2. Colocar con el signo de división, de la siguiente manera: (divisor) $2m - 7 \overline{\big)\, 6m^2 - 31m + 35}$ (dividendo)
3. Obtener el primer término del cociente al dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. $\frac{6m^2}{2m} = 3m$ (Primer término del cociente)
3. Colocar en el cociente este primer término, y multiplicarlo por cada término del divisor el resultado se resta al dividendo, obteniendo un residuo, agregar el siguiente factor del dividendo. Esta expresión se convierte en el nuevo dividendo.

$$\begin{array}{rl} & 3m \text{ (cociente)} \\ \text{(divisor) } 2m - 7 \,\big) & 6m^2 - 31m + 35 \text{ (dividendo)} \\ & \underline{-(6m^2 - 21m)}\ ^* \\ & 0 - 10m + 35 \text{ (Nuevo dividendo)} \end{array}$$

*Nota: Cuando hay un signo negativo antes del paréntesis, los términos que están dentro del paréntesis, cambian de signo.

5. Para obtener el segundo término del cociente, se divide el primer término del nuevo dividendo entre el primer término del divisor: $\frac{-10m}{2m} = -5$ (Segundo término del cociente)
6. Seguir con el paso No. 4, hasta que ya no haya residuo.

$$\begin{array}{rl} & 3m - 5 \text{ (Cociente)} \\ \text{(divisor) } 2m - 7 \,\big) & 6m^2 - 31m + 35 \text{ (dividendo)} \\ & \underline{-(6m^2 - 21m)} \\ & 0 - 10m + 35 \text{ (Nuevo dividendo)} \\ & \underline{-(-10m + 35)} \\ & 0 \quad 0 \end{array}$$

7. La respuesta es el cociente: $3m - 5$

❖ EJERCICIOS

INSTRUCCIONES: Realice las siguientes operaciones de polinomios.

1. $(3x^4y^5 - 2x^2y^4 + 3x^3y^2 + 8xy) + (5xy + 2x^2y^4 + 3x^3y^2 + 2x^4y^5) =$
2. $(5x^2y - 3xy + 17xy^2) + (-x^2y + 5xy - 3xy^2) =$
3. $(7m^3n - 2m^4n^2 + 8m^5n^3) - (-3m^5n^3 - 5m^4n^2 + 3m^3n) =$
4. $(3\ m^4n^3)(-2m^2n^3)(-3mn^4) =$
5. $(9xy^4)^3 =$
6. $(-6x^4y^4)^2 =$
7. $(7x^3y + 4x^2y^2 - 5x^2y^2) \div (xy) =$
8. $(24x^5 - 40x^3 + 15x^2 - 25) \div (3x^2 - 5) =$
9. $(z^3 + z^2 + z) \div (z^2 - z + 1) =$
10. $x\{3(x-1)(x-2) + 2 + [x(x+7)]\} =$
11. $[2z + 1)(2z-1)](4z^2 + 1) =$
12. $(x^2 - 5x + 4) \div (x-4) =$
13. $5 + 2x + 4x^2 + 7 + 3x + 8x^2 =$
14. $2x + 2x^2 - x^3 + 1 + 2x - 0.5x^2 + x^4 + x^3 + 1.4x^4 =$
15. $\dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 7}{x^2 - 3x + 4} =$