UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE ODONTOLOGÍA
CURSO: FÍSICA MATEMATICA
DOCUMENTO DE APOYO A LA DOCENCIA. MODIFICADO CON FINES ACADÉMICOS. AUTORIZADO POR EL AUTOR DEL LIBRO FÍSICA MATEMATICA PARA EL ESTOMATÓLOGO. 2005
AÑO 2019

POTENCIA

"Es el producto formado mediante sucesivas multiplicaciones de un número, letra o expresión algebraica por sí misma".

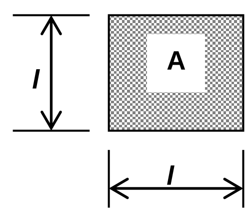
El símbolo $\boldsymbol{a^2}$ denota al número real $\boldsymbol{a \cdot a}$ y $\boldsymbol{a^3}$ se usa en lugar de $\boldsymbol{a \cdot a \cdot a}$. En general, si ***n*** es un entero positivo cualquiera, $\mathbf{a^n = a \cdot a \ldots\ldots a}$ (n factores), cuando ***n*** factores, todos iguales a ***a***, aparecen al lado derecho del signo de igualdad. El entero positivo ***n*** se llama exponente de ***a*** en la expresión $\boldsymbol{a^n}$, y $\boldsymbol{a^n}$ se lee *"**a** a la enésima potencia* ó simplemente *" **a** a la **n**"*. Nótese que $\boldsymbol{a^1 = a}$.

En *2 x 2 x 2 x 2 x 2* el factor *2* se ha usado repetidamente y esto puede escribirse en forma más abreviada (o simbolizarse) como 2^5, en donde el factor repetido, *2*, se llama la base y el *5* más pequeño escrito arriba y a la derecha del *2* es el exponente. La respuesta, *32*, se llama la quinta potencia de *2*. En general se puede decir que;

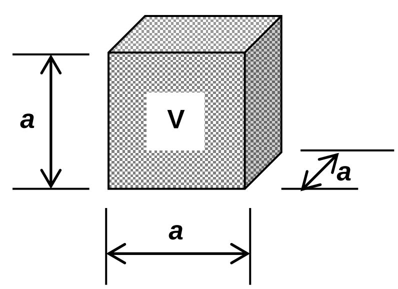
$$\text{Base}^{\text{exponente}} = \text{Potencia}$$

Un exponente es aquel número que indica cuántas veces un segundo número, llamado base, se ha repetido como factor. El resultado de esta operación se llama potencia, por ejemplo, en $3^4 = 81$. El número 3 es la base, el 4 el exponente y 81, la cuarta potencia de 3.

El área de un cuadrado de lado ***l***, se halla multiplicando ***l*** por ***l***, lo que puede escribirse $\mathbf{A} = \boldsymbol{l}^2$ y leerse "el área es igual al lado al cuadrado", ***A*** es entonces la segunda potencia de ***l***.



El volumen de un cubo de arista "***a***" se encuentra multiplicando "***a***" por sí misma tres veces, lo que puede escribirse como $\mathbf{V} = \boldsymbol{a}^3$ y leerse "el volumen es la arista al cubo", ***V*** es entonces la tercera potencia de ***a***.



1.1. LECTURA DE POTENCIAS

" $\boldsymbol{b^2}$ " se lee " ***b*** al cuadrado", " ***b*** a la segunda potencia" o simplemente " ***b*** a la dos". " $\boldsymbol{x^3}$ " se lee "***x*** al cubo", " ***x*** a la tercera potencia", o "***x***, tres". De la tercera potencia en adelante se lee, " a la cuarta", " a la quinta", etc, o "cuatro" , "cinco" y así sucesivamente. Ejemplos:

- **Escritura de bases y exponentes:** En cada caso, abreviar la escritura usando exponentes:
  - $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
  - $3 \times 3 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 7^2$
  - $(3y)\,(3y)\,(3y) = (3y)^3$

- $2ttt / 5vvvv = 2t^3 / 5v^4$
- $7w / xx = 7w / x^2$

- **Escritura sin exponentes:** Escribir sin utilizar exponentes.

  - $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
  - $5 \times 7^3 \times 8 = 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8$
  - $3 \times 5^2 \times 9^5 = 3 \times 5 \times 5 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$
  - $3^3 = 3 \times 3 \times 3$

Es importante recordar que cuando se tiene una expresión como $\boldsymbol{3a^n}$, y $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo, entonces la expresión significa $\boldsymbol{3\,(a^n)}$, pero nunca $\boldsymbol{(3a)^n}$. En la expresión $\boldsymbol{3a^n}$, al número real 3 se le llama coeficiente de $\boldsymbol{a^n}$. Análogamente, $\boldsymbol{-3a^n}$ significa $\boldsymbol{(-3)\,a^n}$, pero no $\boldsymbol{(-3a)^n}$. Por ejemplo:

$$5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40 \quad \text{y} \quad -5 \times 2^3 = -5 \times 8 = -40$$

Si $a \neq 0$, la extensión a exponentes no positivos se realiza definiendo: $a^0 = 1$ y $a^{-n} = 1 / a^n$

4. LEYES DE LOS EXPONENTES

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales y $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son enteros positivos, entonces:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$
5. si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, cuando $m>n$

si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$, cuando $m<n$

- **EXPONENTES ENTEROS NEGATIVOS Y EXPONENTE CERO**

Cuando se considera el significado de la expresión $\boldsymbol{a^{-n}}$, siendo $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{n}$ un entero negativo, la ley 5 de los exponentes es válida para esta expresión puesto que si se tiene la siguiente operación:

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = a^{-2}$$

Para darle a $\boldsymbol{a^{-2}}$ un significado que corresponda a estos resultados, se tiene que establecer que

$$\boldsymbol{a^{-2}} = \frac{1}{a^2}$$

Así se ha llegado a definir a^{-n} como el recíproco de a^n; es decir para todo número $a \neq 0$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Para darle un significado adecuado al cero como exponente, cuando se supone que $a \neq 0$ y que n es un entero positivo. Si en las leyes para los exponentes cero, se tiene:

$$a^n \,.\, a^0 = a^{n+0} = a^n$$

$$\frac{a^n}{a^0} = a^{n-0} = a^n \quad \text{y}$$

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Para poder darle a "a^0" un significado que corresponda a estos resultados, entonces se define

$a^0 = 1$, para todos los números $a \neq 0$.

- **POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES DE EXPONENTE ENTERO**

Sea $\frac{a}{b}$ un número racional y n un número entero. *Si **n** es un entero no negativo, se llama* potencia de base $\frac{a}{b}$ con exponente $a \neq 0$ y exponente n al número racional : $\frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \text{ n veces } = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{Si } n = 1,\ \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b} \qquad \text{Si } n = 0,\ \left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0} = 1/1 = 1$$

Si n es un entero negativo, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{|n|}$, es decir la base es el recíproco de la base de la potencia dada y el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada. Ejemplo:

$(3/5)^{-2} = (5/3)^2$

Observe que si $\frac{a}{b}$ es una racional negativo, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ es *positivo* si n es par y es negativo si n es impar, por ejemplo:

- $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$ (racional positivo)
- $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-2^3}{3^3} = \frac{-8}{27}$ (racional negativo)

- **EXPONENTES FRACCIONARIOS**

Cuando se busca darle un significado al símbolo $a^{1/n}$, siendo n un entero positivo, de tal manera que los exponentes fraccionarios cumplan las leyes previamente desarrolladas para operaciones con exponentes enteros, se mantiene válida la **ley 2** de los exponentes.

$$(a^{½})^2 = a^{2(1/2)} = a$$

pero también se puede definir como, $(\sqrt{a})^2 = a$, de aquí se puede deducir que $a^{½} = \sqrt{a}$, por lo que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Observe que $a^{1/n}$ sólo tiene significado cuando a es un número que tiene una raíz principal de grado n, por tanto, cuando n es par, a es no negativo. De modo general se tiene que: $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

5. RADICALES

El radical es el signo que indica la operación de extraer raíces: $\sqrt{\ }$. También se llama radical la expresión en la que participa dicho signo. Por ejemplo, son radicales $\sqrt[5]{18}$; $7\sqrt[3]{11}$ y $\sqrt{X+5}$ - 2 ; también puede afirmarse que el último ejemplo es una expresión con radical.

Dos radicales del tipo $\mathbf{p}\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ y $\mathbf{q}\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ se llaman semejantes.

Si ***a*** es un número cualquiera y ***n*** un entero positivo cualquiera, tal que $a^n = b$, a ***a*** se le llama la raíz n-ésima, o raíz de grado ***n***, de ***b***. Así 3 es una raíz de grado 2 de 9, ya que $3^2 = 9$. –5 es una raíz de grado 3 de –125, en vista de que $(-5)^3 = -125$ y también –2 es la raíz cuarta de 16, en vista de que $(-2)^4 = 16$. Ordinariamente se habla de una raíz de grado 2 como de una raíz cuadrada, y de una de grado 3 como de la raíz cúbica.

En el caso de que ***b*** tenga raíces racionales de grado ***n***, se define la raíz principal de grado ***n*** de ***b*** como la raíz positiva de grado ***n*** de ***b*** cuando ***b*** es positiva, y como la raíz negativa de grado ***n*** de ***b*** cuando ***b*** es negativa y ***n*** es impar. Así que 2 es la raíz cuadrada principal de 4, -2 es la raíz quinta principal de –32, y 6 es la raíz cuadrada principal de 36.

El radical $\sqrt[n]{b}$ debe representar a la raíz principal de grado ***n*** de ***b***, es decir,

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = a \quad si \quad a^n = b}$$

Si ***a*** tiene igual signo que ***b***. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama signo radical, al número ***b*** se le llama radicando, y al entero positivo ***n***, se le llama el índice, o el orden o grado del radical. El símbolo $\sqrt[n]{b}$ se lee "la raíz de grado ***n*** de ***b***". En la raíz cuadrada se omite, por lo general, el índice 2 del símbolo, y así se acostumbra a escribir $\sqrt{25}$ en vez de $\sqrt[2]{25}$.

6. PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Para el buen uso de los radicales es necesario tener en cuenta una serie de propiedades que se indican a continuación.

a. Raíz de una raíz: $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p\cdot q]{a}$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$

b. Raíz de una potencia: $\sqrt[p]{a^n} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^n$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

Esta propiedad es útil para sacar un factor de una raíz: $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c. Simplificación: $\sqrt[n\cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$. Por ejemplo, $\sqrt[15]{8} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[5\cdot 3]{2^3} = \sqrt[5]{2}$

Existen otros tipos de sumas con radicales que no se pueden simplificar. Es el caso, por ejemplo, de $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$, que hay que dejarla indicada o calcular sus aproximaciones decimales y sumar sus resultados. Lo mismo sucede con la expresión: $\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}$.

d. Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot 3=6$

e. Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{0{,}008}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{1.000}}=\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1.000}}=\dfrac{2}{10}=0{,}2$

f. Suma de radicales: $p\sqrt[n]{a}+q\sqrt[n]{a}=(p+q)\sqrt[n]{a}$. Por ejemplo, $17\sqrt[5]{4}+11\sqrt[5]{4}=(17+11)\sqrt[5]{4}=28\sqrt[5]{4}$

❖ **EJERCICIOS**

A. Simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes negativos, si se diere el caso.

1. $\dfrac{x^2\,x^6}{y^7\,y^{10}}=$

2. $\dfrac{(x^2)^5}{(y^5)^{10}}=$

3. $(2x^2\,y^3)^3=$

4. $\dfrac{(x^3)^6}{x(x^3)}=$

B. Traslade las siguientes expresiones a forma radical o exponencial según sea el caso.

5. $\sqrt{25}=$

6. $\sqrt[5]{-32}=$

7. $\sqrt[4]{1/16}=$

8. $(100)^{½}=$

9. $4^{3/2}=$

10. $(32)^{-2/5}=$

C. Escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final.

11. $\dfrac{x^3\,y^{-2}}{z^2}=$

12. $2\,x^{-1}\,x^{-3}=$

13. $(3t)^{-2}=$

14. $\sqrt[3]{7s^2}=$

D. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. En donde sea necesario, racionalice el denominador con el fin de evitar exponentes fraccionarios en el denominador.

15. $2x^2\,y^{-3}\,x^4=$

16. $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}=$

17. $\dfrac{2^0}{(2^{-2}\,x^{½}\,y^{-2})^3}=$

18. $\dfrac{(x^2\,y^{-1}\,z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}=$

19. $\dfrac{8\ s^{-2}}{2\,s^3}=$

20. $(2x^2\,y\div 3\,y^3\,z^{-2})^2=$

E. Traslade los enunciados verbales escritos a enunciados algebraicos o matemáticos.

21. La longitud **s** del lado de un cuadrado es la raíz cuadrada del área **A**. ________________________

22. La longitud **s** de la arista de un cubo es la raíz cúbica del volumen **V**. ________________________

23. La longitud **C** de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes **a** y **b** de los otros lados. ________________________________

24. La velocidad **v** de un satélite en una órbita circular alrededor de la tierra es igual a la raíz cuadrada del producto del radio **r** de la órbita y la aceleración de caída libre **g** en la órbita. ______________

25. Si un satélite da vueltas alrededor de la tierra en un órbita circular de radio $\mathbf{r = 6.70 \times 10^6\ m}$, halle su velocidad **v** si $\mathbf{v = R\sqrt{g/r}}$, donde **R** es el radio de la tierra y **g** es la aceleración de caída libre debida a la gravedad, en la superficie de la tierra. Utilice los valores de: $\mathbf{R = 6.40 \times 10^6\ m}$ y $\mathbf{g = 9.80\ m/s^2}$.

26. De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a una velocidad v es dada por:

$$\mathbf{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

donde: $\mathbf{m_0}$ es la masa del objeto en reposo y **c** es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de 0.6 km/s, si su masa en reposo es de 9.1×10^{-31} kg. La velocidad de la luz es aproximadamente 300,000 km/s. ____________________________________

7. NOTACIÓN CIENTÍFICA

En las áreas científicas, es muy común trabajar con números muy grandes o muy pequeños, que se simplifican escribiéndolos en la forma $\mathbf{a \times 10^n}$, en donde a es un decimal tal que $\mathbf{1 \leq a < 10}$ y **n** es un entero. Esto se conoce como la forma científica de expresar números reales. La forma científica permite al lector determinar rápidamente (sin contar ceros) las magnitudes relativas de números grandes o pequeños.

Por ejemplo, la distancia que recorre un rayo de luz en un año es aproximadamente $5_2\,900{,}000_1000{,}000$ millas. Esto se puede escribir en forma científica como 5.9×10^{12}. El exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe desplazarse 12 lugares hacia la derecha. Esta notación también funciona para números muy pequeños. Por ejemplo: En estudios realizados se ha estimado que el peso de una molécula de oxígeno es de 0.000000000000000000000053 gramos (**g**) o, en forma científica, 5.3×10^{-23} g. El exponente negativo indica que el punto decimal debe desplazarse 23 lugares hacia la izquierda.

Las calculadoras dan frecuentemente los resultados en notación científica. En este caso, el número 10 utilizado en la notación científica $a \cdot 10^n$ se omite y únicamente aparece el exponente. Por ejemplo, para evaluar $(4\ 500\ 000)^2$ con una calculadora común se marca el número 4 500 000 y se pulsa la tecla x^2. Aparece el resultado:

2.025 13

que significa 2.025 por 10^{13}. Se tiene pues: $20_2250{,}000_1000{,}000$.

Los problemas de aplicación incluyen a menudo números que se obtienen mediante diferentes tipos de mediciones y, por lo tanto, son aproximaciones de los valores exactos. En esos casos las respuestas deben redondearse ya que el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que se han utilizado. Por ejemplo, si se miden la longitud y el ancho de un rectángulo con una precisión de dos cifras decimales, no se puede esperar una exactitud mayor que dos cifras decimales en el valor calculado del área del rectángulo.

- ❖ **EJERCICIOS**
  - Escribir los números dados en notación científica, con dos cifras significativas:
  - ❖ $1_{1}050,000$
  - ❖ $341_{1}000,000$
  - ❖ $1,200_{1}000,000$
  - ❖ 825,600
  - ❖ 0.00341
  - ❖ 0.000000000120
  - ❖ 0.0008256

- Escribir los números dados en forma decimal:

  - ❖ 3.25×10^{7}
  - ❖ 4.02×10^{10}
  - ❖ 9.87×10^{-17}
  - ❖ 3.25×10^{-5}
  - ❖ 4.02×10^{-4}
  - ❖ 9.87×10^{12}
  - ❖ 1.423×10^{-4}

En 1982 se calculó que la población de la China era de $1,060_{1}000,000$. Escriba este número en notación científica.

- En 1985 el déficit del presupuesto de Guatemala fue de 211,900 millones de quetzales. Escriba este número en:
  a) En forma Decimal
  b) En forma Notación Científica