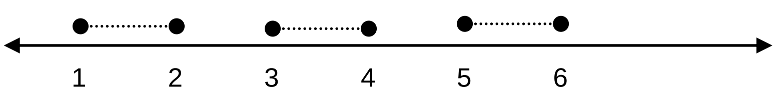
ARITMÉTICA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE ODONTOLOGÍA
CURSO: FÍSICA MATEMATICA
DOCUMENTO DE APOYO A LA DOCENCIA. MODIFICADO CON FINES ACADÉMICOS. AUTORIZADO POR EL AUTOR DEL LIBRO FÍSICA MATEMATICA PARA EL ESTOMATÓLOGO. 2005
AÑO 2019

CONTENIDO

El desarrollo de los números ha permitido avances tecnológicos en diversidad de ciencias. Para los cirujanos dentistas, también es importante dicho desarrollo, por la estrecha relación con el descubrimiento de nuevos materiales dentales, que han renovado la práctica odontológica, haciéndola más eficiente y eficaz. Pero esto no hubiera sido posible, sin este desarrollo de los números.

El primer conjunto numérico se formó por la necesidad del ser humano de poder contar sus cosechas, personas, cosas, etc. A este conjunto de números se les llama naturales, los cuales se pueden representar sobre una línea recta, como una serie de puntos.



Este conjunto de números es muy limitado, puesto que sólo se pueden realizar ciertas operaciones, como sumas, multiplicaciones y algunas restas. Por esta razón, se creó otro conjunto de números, llamados enteros, el cual contiene al conjunto de números naturales, y también números negativos y al cero, con lo cual, se amplió la gama de efectuar operaciones y también la ventaja de poder representar cantidades que tienen sentidos opuestos, como por ejemplo: pérdidas y ganancias, izquierda y derecha, abajo y arriba, otra ventaja que se obtuvo fue el de ampliar la forma de representarlos sobre una línea recta, llamada la recta numérica.

Conforme el hombre avanzó en sus descubrimientos del mundo que lo rodeaba y de la creación de nueva tecnología, surgieron operaciones numéricas que era imposible realizarlas con el conjunto de los números enteros, por lo tanto fue necesario ampliar el campo de los números, surgiendo los números racionales, como cocientes de dos enteros, completando aún más la recta numérica, sin embargo, todavía habían algunos puntos en esa recta que no eran completados con este conjunto de números, apareciendo los números irracionales, tales como el número π, que no tiene una representación decimal periódica. Los conjuntos de los números racionales e irracionales,

1. OPERACIONES ARITMÉTICAS. SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.

Antes de referirnos al sistema de los números reales, hay que diferenciar entre lo que se entiende por número y por numeral. Los conjuntos equivalentes tienen una propiedad común: tener la misma cantidad de elementos, la cual es conocida como "número". El número es una abstracción. Los números tienen la propiedad de orden, es decir, se pueden ordenar de mayor a menor y viceversa, también es posible establecer el que sigue a un número dado. La propiedad de orden permite compararlos, además de ordenarlos. Los números pueden representarse por medio de numerales asignados a un punto en la recta numérica o coordenada, o sea el numeral es el símbolo que se usa para representar al número, como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, en este caso Estos símbolos son llamados indo-arábigos.

Los números se agrupan en conjuntos o estructuras diversas; cada una contiene a la anterior y es más completa que ésta y con mayores posibilidades de ejecutar operaciones. El conjunto mayor que se estudiará en este curso, es el conjunto de los números reales, compuesto por los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real. A continuación se enumerará cada uno de los conjuntos pertenecientes al sistema de los números reales.

1.1. NUMEROS NATURALES (N)

El conjunto de los números naturales, representados por la letra **N,** son todos aquellos números que sirven para contar. Por tanto, los números que pertenecen a dicho conjunto son: **N= { 1,2,3,4,5,...}** ; donde los puntos suspensivos nos expresan que el conjunto es infinito.

1.1.1. PROPIEDADES

- **N** es un conjunto infinito.
- Entre dos números naturales siempre existe un número finito de números naturales. Ejemplo
  - Entre 20 y 21 existe 0 números naturales.
  - Entre 20 y 22 existe 1 número natural.
  - Entre 20 y 49 existe 28 números naturales.
  - Entre ***a*** y ***b*** (siendo ***a*** < ***b***) existen ***b*** - ***a*** - *1* números naturales
- **N** tienen al número 1 como primer elemento y no tiene último elemento.
- Todo número natural tiene sucesor.
- Todo número natural, excepto el 1, tiene antecesor.
- Un número natural y su sucesor se llaman **consecutivos**.
- Los números naturales no completan la recta numérica.

1.1.2. OPERACIONES

Las operaciones de adición, multiplicación y potenciación siempre son posibles en **N**. Sin embargo, las operaciones de sustracción, división y radicación no siempre son posibles en **N**.

1.2. NUMEROS ENTEROS (Z)

La creación de los números enteros fue el resultado de la imposibilidad de resolver casos de sustracción en los números naturales. El conjunto de los números enteros se representan por la letra **Z**. Dentro de éstos se encuentra el conjunto de los números negativos, el cero y el conjunto de los números positivos. Recuerde que el *0* (cero) no es positivo ni negativo y que los números naturales se llaman también enteros positivos.

Z= {...,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4...} Enteros
Z^+= { 0, 1, 2, 3, 4} Enteros no negativos
Z^- = {...,-4,-3,-2,-1} Enteros negativos.

1.2.1. PROPIEDADES

- Es un conjunto infinito.
- Entre dos números enteros siempre existe un número finito de números enteros. Ejemplos:
  - Entre -1 y 2 existen dos números enteros.
  - Entre -8 y 8 existen 15 números enteros.
  - Entre ***a*** y ***b*** (siendo ***a*** < ***b***) existen ***b*** - ***a*** - *1* números enteros.
- **Z** no tienen primero ni último elemento.
- En la recta numérica los números enteros positivos se representan a la derecha de cero y los enteros negativos a la izquierda de cero.
- Los números enteros no completan la recta numérica.

1.2.2. OPERACIONES

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación de base entera y exponente natural, siempre son posibles en el conjunto **Z**. Sin embargo, las operaciones de división, potenciación de exponente negativo y la radicación no son siempre posibles.

1.3. NÚMEROS RACIONALES (Q)

El conjunto de los números racionales se representa por la letra **Q**. Los números racionales se crearon para resolver los casos no posibles de división entre números enteros **(Z)**. Se llama número racional, a cada una de las fracciones equivalentes, que se forman al establecer la relación **ser equivalente a** en el conjunto de las fracciones. Es decir, el conjunto de números racionales es un conjunto de fracciones equivalentes entre sí y cada clase representa un número racional. Así, la clase de fracciones equivalentes: {2/6, -2/-6, 1/3, -1/-3, 6/18, -6/-18} es un número racional.

Para facilitar su comprensión se toma como representante de un número racional, una fracción irreductible de denominador positivo.

1.3.1. PROPIEDADES Y OPERACIONES

ADICIÓN:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

SUSTRACCIÓN

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} + \frac{12}{7} = \frac{(3)\,7 + (5)\,12}{5\,(7)} = \frac{21 + 60}{35} = \frac{81}{35}$$

$$\frac{8}{5} - \frac{12}{7} = \frac{8}{5} + \frac{(-12)}{7} = \frac{(8)\,7 + (5)\,(-12)}{(5)\,7} = \frac{56 - 60}{35} = \frac{-4}{35}$$

MULTIPLIACIÓN:

$$\frac{a}{b} \; X \; \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

- **División:** Para dividir dos números racionales, existen dos procedimientos:

$$\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{a\,(d)}{b\,(c)}$$

Ejemplos:

$$\frac{-5}{3} \; x \; \frac{-8}{7} = \frac{(-5)\,(-8)}{(3)\,(7)} = \frac{40}{21}$$

$$\frac{-3}{5} \; x \; \frac{11}{12} = \frac{(-3)\,(11)}{(5)\,(12)} = \frac{-33}{60} = \frac{-11}{20}$$

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{7} \; \mathbf{x} \; \frac{4}{5} = \frac{(3)\,(4)}{(7)\,(5)} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-11}{4} \div \frac{-8}{3} = \frac{(-11)\,(3)}{(4)\,(-8)} = \frac{-33}{-32} = \frac{33}{32}$$

Observe que la regla de los signos utilizada para el producto de números racionales, es válida también para la división de éstos.

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES (I)

Un número irracional es un número real que no es racional, por lo tanto no puede expresarse como la relación entre dos enteros, ni como fracción decimal limitada ni tampoco como fracción decimal ilimitada periódica. Ejemplos de números irracionales:

π = 3.1416
= 2,236
= 1,4142

1.5. NUMEROS REALES

Un número real se puede representar mediante una expresión decimal de infinitas cifras. El conjunto de los números reales se simboliza con la letra **R** y está formado por los conjuntos de números descritos anteriormente, que se relacionan entre sí. Algunas deducciones importantes entre estos conjuntos son:

- Un número real puede ser racional o irracional. El número real 2 es racional y el real es irracional.
- Un número racional puede ser o no entero. El número racional 2/1 es entero y el racional 2/3 no es entero.
- Un entero puede ser positivo, negativo o nulo. El entero 2 es positivo, el entero -2 es negativo y el entero cero no es positivo ni negativo.
- Un entero no negativo es, o un natural, o cero. 2 es un natural y 0 no lo es.
- Un natural es uno de aquellos números que usamos para contar objetos; pertenece al

El conjunto **R,** de los números reales completa la recta numérica. A todo número real corresponde un punto sobre la recta y a todo punto sobre la recta corresponde un número real.

1.5.1. PROPIEDADES

a. **PROPIEDADES CONMUTATIVAS:** $a + b = b + a$ y $ab = ba$

b. **PROPIEDADES ASOCIATIVAS:** $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$

c. **PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS:** $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$

Puesto que $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, se puede usar el símbolo $a + b + c$ para denotar este número real, sin ninguna confusión. Del mismo modo, la notación ***abc*** se emplea para $a(bc)$ o $(ab)c$. Una situación análoga se presenta si se suman o multiplican cuatro o más números reales. Entonces, si ***a, b, c*** y ***d*** son números reales, se puede escribir su suma como $a + b + c + d$ y su producto como ***abcd*****,** sin importar la forma como estén agrupados los números o como se puedan intercambiar. Las propiedades distributivas sirven para hallar los productos de muchos tipos de expresiones.

1.5.2. TEOREMA ACERCA DEL NÚMERO "0"

En el sistema de los números reales, el número 0, es el único que no es ni positivo ni negativo, y representa el límite entre los números positivos y los negativos. Esta propiedad hace que el cero sea el punto inicial por naturaleza, u origen en muchas escalas, ejes coordenados y termómetros.

$a \cdot 0 = 0$ para todo número real ***a***.
Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$.

El teorema anterior implica que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. La frase "Si y sólo si" que es utilizada en matemática, siempre tiene un carácter doble. Aquí significa que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o bien $b = 0$, y recíprocamente si $a = 0$ o bien $b = 0$, entonces $ab = 0$. Por consecuencia $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $ab \neq 0$; esto es, el producto de dos números reales distintos de cero, es siempre distinto de cero. La división por cero no está definida y es, por tanto, una operación prohibida.

1.5.3. NÚMEROS NEUTROS. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS "0" Y "1"

$a + 0 = a$	y	$a \times 1 = a$,	para todo número real **a**.
(Neutro aditivo)		(Neutro multiplicativo)	

Los números reales *0* y *1* se suelen denominar **neutro aditivo** y **neutro multiplicativo**, respectivamente.

1.5.4. INVERSOS

- $(-a)$ es **inverso aditivo** de a (ó negativo de a)
- Si $a \neq 0$, entonces $1/a$ es el **inverso mutiplicativo** de a (o recíproco de a)
- El símbolo de a^{-1} se usa con frecuencia en lugar de $1/a$. Se tiene entonces que:

$$a^{-1} = 1/a \text{ si } a \neq 0$$

1.5.5. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

$$-(-a) = a$$
$$(-a)\, b = -(ab) = a\,(-b)$$
$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-1)\, a = -a$$

1.5.6. PROPIEDADES DE ALGUNAS OPERACIONES

- **SUSTRACCIÓN O RESTA**

$$a - b = a + (-b)$$

- **DIVISIÓN**

$$a \div b = (a)\,\frac{1}{b} = ab^{-1} \text{ si } b \neq 0$$

El símbolo a/b, es utilizado con frecuencia en lugar de $a \div b$ y se refiere a éste como el cociente de a entre b o la fracción a sobre b. Los números a y b se llaman numerador y denominador respectivamente. Es importante notar que, puesto que el 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definido para $b = 0$; esto es, no se permite la división entre cero.

Obsérvese también, que: $1 \div b = 1 / b = b^{-1}$

1.5.8. FACTORES O DIVISORES

Si a, b y c son enteros, $c = ab$, entonces a y b se llaman factores, o divisores, de c. Por ejemplo, el entero 6 puede escribirse como

$6 = (2x3) = [(-2)(-3)] = (1x6)= [(-1)(-6)]$, por consiguiente 1, -1,2,-2,3,-3,6 y -6 son factores de 6.

1.5.9. NÚMEROS PRIMOS

Un entero positivo p diferente de 1 es primo, si sus únicos factores positivos son 1 y p. Algunos de los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El teorema fundamental de la aritmética dice que todo entero positivo diferente de 0 se puede expresar como el producto de números primos según una y solamente una forma (excepto por el orden de los factores). Ejemplos:

$12 = 2 . 2 . 3$ y $126 = 2 . 3 . 3 . 7$

1.5.10. DEFINICIÓN DE RAÍZ CUADRADA

Sea ***a*** un número real no negativo. La raíz cuadrada principal de ***a*,** denotada por $\sqrt{a}$, es el número real no negativo ***b*** tal que $b^2 = a$. A menudo se refiere a $\sqrt{a}$ simplemente como la *raíz cuadrada de* ***a***. Algunas raíces cuadradas son racionales. Por ejemplo:

$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9/4} = 3/2$	$\sqrt{16} = 4$

Otras raíces cuadradas, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *y* $\sqrt{7/2}$, son irracionales.

1.5.11. DEFINICIÓN DE > Y <

a > ***b*** significa que ***a – b*** es positivo.
b < ***a*** significa que ***a – b*** es positivo.

Nótese que ***a*** > ***b*** y ***b*** < ***a*** significan exactamente lo mismo.

a > 0 si y sólo si ***a*** es positivo.
a < 0 si y sólo si ***a*** es negativo.

En base a lo expuesto anteriormente, queda claro que si ***a*** y ***b*** son números reales, entonces una y solamente una de las siguientes expresiones es verdadera.

a = b , a > b, o bien a < b

1.5.12. LEYES DE SIGNOS

El signo de un número real se considera positivo o negativo. Dos números reales tienen el mismo signo si ambos son positivos o negativos; tienen signos opuestos si uno es positivo y el otro negativo.

Si **a** y **b** tienen el mismo signo, entonces **ab** y **a / b** son positivos.
Si **a** y **b** tienen signos opuestos, entonces **ab** y **a / b** son negativos.

Tabla de signos

Signo	operación	signo	Resultado
+	Multiplicado por	**+**	**+**
+	Dividido entre	**+**	**+**
-	Multiplicado por	**-**	**+**
-	Dividido por	**-**	**+**
+	Multiplicado por	**-**	**-**
-	Multiplicado por	**+**	**-**
+	Dividido por	**-**	**-**
-	Dividido por	**+**	**-**

Los recíprocos de la ley de los signos también son ciertos. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

1.5.13. NOTACIÓN

Es la representación de algo mediante signos convencionales.

La notación ***a*≥ *b*,** que se lee ***a* es mayor o igual que *b***, y quiere decir que ***a***> ***b*** o bien ***a*** = ***b*** (pero no ambos).
La notación ***a*** ≤ ***b***, se lee ***a* es menor o igual que *b***, y significa que ***a*** < ***b*** o bien ***a*** = ***b***. (pero no ambos).
La expresión ***a*** < ***b*** < ***c*** significa que ***a*** < ***b*** y ***b*** < ***c***, en cuyo caso decimos que ***b*** está entre ***a*** y ***c***.
La expresión ***c*** > ***b*** > ***a*** significa que ***c*** > ***b*** y ***b*** > ***a***.
Cuando se escribe ***a***<***b***≤ ***c*** significa que ***a***< ***b*** y ***b***≤ ***c***. Análogamente, ***a***≤ ***b*** y ***b*** ≤ ***c***. Finalmente, ***a*** ≤ ***b*** y ***b*** ≤ ***c***.

1.5.14. VALOR ABSOLUTO DE UN NÙMERO REAL

$|\boldsymbol{a}| = \{ \boldsymbol{a}$ si $\boldsymbol{a} \geq 0$ y si $\mathbf{-a} < 0\}$
$|\boldsymbol{a}| = |\mathbf{-a}|$ para todo número real $\boldsymbol{a}$.

El concepto de valor absoluto se utiliza para definir la distancia entre dos puntos de una recta coordenada.

1.5.15. JERARQUÍA DE OPERACIONES Y DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Para la operación de expresiones algebraicas, tienen que respetarse las siguientes jerarquías:

- **Operaciones:**
  1^0. Potencias y raíces
  2^0. Multiplicación y División
  3^0. Sumas y restas

- **Signos de agrupación:**
  1^0. Paréntesis
  2^0. Corchetes
  3^0. Llaves